

5BN VAI 1526909

DEUXIÈME LIVRAISON.

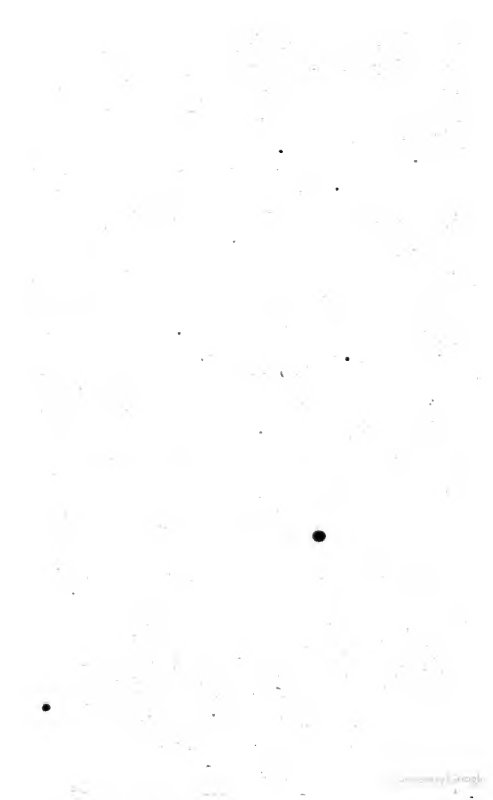
RÉFORME DE LA GÉOMÉTRIE,

PAR M. CHARLES BAILLY,
Auteur de la Théorie de la Raison humaine.

LES FAITS GÉOMÉTRIQUES.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

—
1836.



RÉFORME

DE

LA GÉOMÉTRIE.

Les Faits géométriques.

Toute science, pour exister, a besoin de *faits* d'une certaine nature, qui ne se prouvent ni ne se démontrent, et qui sont destinés à lui servir de base fondamentale. Si les corps n'étaient pas donnés, il n'y aurait ni physique, ni chimie; s'il n'y avait pas des plantes, il n'y aurait point de botanique. Pour faire de la zoologie, il faut des animaux; pour faire de la minéralogie, il faut des minéraux. De même, pour faire de la géométrie, il faut des données sur lesquelles cette science puisse s'établir : ces données forment ce qu'on peut appeler les *faits géométriques*.

Il est clair qu'il faut commencer par en faire l'énumération, et par les distinguer soigneusement les uns des autres en leur donnant des noms particuliers. Cette analyse, qui est de première nécessité, n'est point un assemblage de *principes* et d'*axiomes* comme on l'a toujours dit; elle consiste simplement à mettre en évidence la matière même de la science dont il s'agit.

On appelle *ligne*, ce qui sert à indiquer une direction. Lorsque la direction représentée est le plus court chemin d'un lieu à un autre, la *ligne* est dite *droite*; on dirait, *ligne brisée* dans le cas contraire, si toutefois il y avait plusieurs *lignes droites* reliées entre elles. Mais si la *ligne*,

se coupent en un point B : elles forment un angle que l'on désigne par ABC, en ayant soin de mettre la lettre B, qui est au sommet, dans le milieu de l'énoncé.

Si nous prolongeons CB jusqu'en H, nous aurons une ligne droite CH, coupée en un de ses points B par une autre ligne AB; il en résultera deux angles, ABC et ABH, dont le premier est plus petit que le second. En supposant que le point A s'approche du point H, il est évident que l'angle ABC augmentera d'une certaine quantité, et que l'autre diminuera d'autant. Il y aura un moment où ces deux angles seront égaux; et ce moment sera celui où le point A aura fait la moitié de sa course de C vers H. Si nous représentons cette course par 1, nous aurons deux angles demis, lorsque le point A aura accompli la moitié de son trajet. Lorsqu'il en aura parcouru le tiers, nous dirons, angle *tiers*; le quart, angle *quart*; le cinquième, angle *cinquième*; etc. De sorte que chaque angle sera représenté par une fraction ordinaire qui en indiquera aussitôt la valeur.

La somme des angles formés au point B, et d'un même côté de la ligne HC, est constante; elle est égale à deux angles demis, trois angles tiers, quatre angles quarts, etc. Il est inutile de dire combien il est ridicule de vouloir démontrer que les angles *droits* ou *demis* sont égaux. Dans le cas où la chose aurait un sens, il faudrait aussi démontrer que les angles *tiers*, *quarts*, *cinquièmes*, sont égaux entre eux; et, par suite, on aurait à démontrer que 1 est égal à 1; que $\frac{1}{2}$ est égal à $\frac{1}{2}$; que $\frac{1}{3}$ est égal à $\frac{1}{3}$, ce qui serait le comble de l'absurdité.

En considérant les angles formés au point B (*fig. 1*), on a évidemment la somme HBA + ABC qui est égale à ABC + CBK : ce qui fait voir que HBA est égal à CBK ; ces deux angles sont dits opposés par le sommet : *tous les angles opposés par le sommet sont égaux.*

Prenons AB égal à BC, et joignons le point A au point C par une droite. A mesure que le point A s'éloignera du point C, la ligne AC croîtra, et elle diminuera dans le cas contraire, c'est-à-dire dans le cas où A s'approchera de C. Dans ce parcours, il y aura un moment où AC sera égal à CB et à AB : le triangle ABC sera alors *équilatéral*, c'est-à-dire que ses trois côtés seront égaux. Lorsqu'un triangle n'en a que deux d'égaux, il s'appelle *isocèle*, et l'on dirait triangle *scalène* s'il n'avait aucun de ses côtés égaux.

Il est clair que si, dans le triangle ABC, les trois côtés sont égaux, les angles le sont aussi, et que lorsqu'un triangle est *équilatéral*, il est aussi *équiangle*. Il est également évident que, si un angle augmente, le côté opposé devient plus grand, et que toutes les démonstrations que l'on prétend faire à ce propos, ne sont autre chose qu'un babillage creux, bien propre à donner le dégoût de la science.

L'angle ABH, formé par le côté AB et le côté CB prolongé du triangle ABC, s'appelle un angle extérieur au triangle. Si le triangle est *équilatéral*, l'angle ABH est égal à l'angle A plus à l'angle C ; car ABH est de deux tiers, et les angles A et C sont tiers. Dans le cas où le triangle serait *isocèle* ou *scalène*, la même chose aurait lieu, c'est-à-dire que l'angle extérieur serait toujours égal à la somme des angles opposés. Pour le faire voir, il suffit de supposer que AC prenne une même position MB, relativement à HC ; nous aurions alors $MBH = ACB$, puisque l'inclinaison est la même. Il reste ABM qu'il faut apprécier. Prolongeons MB en R, et nous aurons $ABM = RBK$, comme opposés par le sommet ; mais RBK est égal à BAC, puisque MB a la même inclinaison que AC sur CH et sur BA : d'où il résulte que ABM est égal à BAC. On conclut facilement de là que l'angle du triangle *équilatéral* est un angle *tiers* ; que dans tout triangle la somme des trois angles vaut deux angles

demis, trois angles *tiers*, quatre angles *quarts*, et ainsi de suite.

Le triangle ABC est tel, que si un autre triangle avait un angle égal à l'angle A par exemple, et deux côtés égaux à AC et à AB, ces deux triangles seraient égaux : ils le seraient évidemment aussi s'ils avaient un côté et deux angles égaux, ou bien encore s'ils avaient les trois côtés égaux. Inutile de répéter qu'au plus grand angle est toujours opposé le plus grand côté, et réciproquement; et qu'il n'y a aucune démonstration possible à ce sujet.

Les deux lignes AC et MR, qu'on suppose ne pouvoir jamais se rencontrer, quelle que soit la distance à laquelle on les prolonge, sont dites des lignes *parallèles* : elles sont assurément partout à égale distance, et si on les coupait par une sécante CH, il est évident que la somme des angles intérieurs situés d'un même côté de la sécante vaudrait deux demis. Les angles ACB, MBH sont appelés *correspondants*, ainsi que les angles ABC, RBK ; les angles CBR et ACB sont dits *alternes-internes*, ainsi que tous ceux qui ont une position analogue, relativement aux parallèles et à la sécante envisagées. Rien n'est plus facile que de faire voir que les angles de même nom sont égaux.

En prenant MB et BH égales à AB et à BC et en joignant le point H au point M, le point M au point A, on aurait trois triangles équilatéraux qui seraient égaux. Il est évident qu'on en pourrait construire trois autres de l'autre côté de la ligne CH : la figure ainsi obtenue serait un *hexagone* qui aurait six sommets également éloignés du centre B.

Si l'on faisait tourner la ligne BC autour du point B, l'autre point, C, tracerait une ligne courbe dont tous les points seraient à égale distance du centre B, et qu'on appelle *circonférence*. L'espace limité par cette courbe est appelé *cercle*. La ligne droite qui va du centre à un point de la courbe en est le *rayon*. La ligne droite CH, qui est le double

du rayon, et dont les deux extrémités sont sur la circonférence, en est le *diamètre*. Toute autre droite qui serait terminée à la circonférence; et qui ne passerait pas par le centre, est appelée *corde*. Le diamètre, en s'éloignant du centre, devient une corde; et cette corde est d'autant plus petite, qu'elle s'éloigne davantage du centre. Lorsqu'elle arrive à ne plus toucher la circonférence qu'en un seul point, on dit alors qu'elle est *tangente* à la circonférence. On appelle *arc*, une partie de la circonférence; la portion de cercle comprise entre deux rayons est un *secteur*, et celle comprise entre l'*arc* et la *corde* prend le nom de *segment*.

En joignant le point A au point M, on obtient un quadrilatère ACBM dont les quatre côtés sont égaux. Les angles ACB et MBH étant égaux, les côtés AC et MB sont parallèles, ainsi que les côtés MA et BC. Un quadrilatère qui jouit de ces propriétés est appelé *rhombe* ou *losange*. Si les côtés étaient parallèles sans être égaux, ce serait un *parallélogramme*; et la figure serait un *carré*, si les côtés étaient égaux et les quatre angles demis.

Les lignes BA et MC, qui joignent les sommets opposés dans un quadrilatère, en sont les *diagonales*. Il est visible que dans un losange ces diagonales se coupent au point O en deux parties égales et en faisant des angles demis. On peut tirer de là une application utile, soit pour partager une ligne donnée en deux parties égales, soit pour élever une perpendiculaire sur le milieu, ou en un point quelconque de cette ligne, soit même à son extrémité sans la prolonger.

Je suppose que cette ligne donnée soit BA. Du point B, avec une ouverture de compas égale à la ligne, on décrit une circonférence; du point A comme centre, et avec la même ouverture, on détermine les points M et C; en les joignant, par une droite MC, on coupe BA en deux parties égales par une ligne qui est perpendiculaire sur son milieu. Si l'on voulait que cette perpendiculaire passât au point B, on ferait

la même construction et on déterminerait de plus le point R; en prenant $CI = OB$, et en menant IB, on aurait la *perpendiculaire* au point B: car ABC est tiers, et CBP sixième; mais un tiers plus un sixième valent un demi, ce qui justifie l'énoncé. On voit aussi qu'il est très-facile d'avoir le tiers d'un angle demi: il suffit de décrire un arc AP de son sommet B, de déterminer C du point A, et, joignant le point C au point B, on obtient CBP, qui est égal au tiers de ABP.

Il est facile de remarquer aussi que la ligne CR est parallèle à AB, et qu'on a par là un moyen fort simple de mener une parallèle à une ligne donnée. Supposons que AB soit cette ligne: en décrivant, du point B, l'arc ACR et en déterminant avec la même ouverture les points C et R, on aurait la parallèle en joignant le point C au point R. Si le point par lequel il faudrait mener la parallèle était donné, le point N par exemple, ainsi que la ligne, il suffirait de prendre pour centre un point quelconque de la ligne et de faire passer l'arc par le point donné N, puis de déterminer comme précédemment les points C et R et de faire $RT = NC$. En joignant le point N au point T, on aurait la parallèle à AB. On pourrait aussi prendre $AN = KT$.

Dans le parallélogramme et dans le carré, les diagonales se coupent aussi en deux parties égales.

Si nous considérons la circonférence (*fig. 1*), nous verrons: que le diamètre est la plus longue de toutes les cordes, qu'il divise le cercle et la circonférence en deux parties égales; qu'une ligne droite ne peut couper la circonférence en plus de deux points; que toutes les cordes également éloignées du centre sont égales, et réciproquement; que lorsqu'elles sont égales, elles sous-tendent des arcs égaux; que deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux; que la perpendiculaire à l'extrémité du rayon est une tangente; que la perpendiculaire abaissée du centre sur la

corde la divise, et l'arc sous-tendu, en deux parties égales.

En décrivant une seconde circonférence à côté de celle que nous envisageons, nous aurions matière à beaucoup d'autres propositions qu'il serait très-facile de formuler. Nous verrions, par exemple, que lorsque deux circonférences sont *extérieures*, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, que cette différence diminue à mesure que les circonférences se rapprochent, et qu'elle devient zéro lorsque les deux circonférences sont tangentes. Si les deux centres se rapprochaient davantage, les deux circonférences se couperaient : alors la distance des centres serait plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence. Toutes ces propositions se saisissent immédiatement, et il faut ignorer la signification des trois quarts des mots pour en faire l'objet d'une démonstration ou d'une preuve.

En considérant l'angle MBH, qui a son sommet au centre de la circonférence, nous remarquerons qu'il correspond à l'arc MH, et que cet arc croîtra ou décroîtra selon que l'angle augmentera ou diminuera : un angle peut donc s'apprécier par l'arc décrit de son sommet, et réciproquement. L'arc pris pour unité est la trois-cent-soixantième partie de la circonférence : il s'appelle un *degré* ; c'est pourquoi on dit que l'angle demi KBP = 90° , l'angle tiers, 60° , etc. L'angle MBH a donc pour mesure l'arc MH qui contient 60° ou, ce qui est la même chose, l'angle tiers contient 60 fois l'angle qui correspond à l'arc d'un degré.

L'angle MCH, qui a son sommet sur la circonférence, et dont les deux côtés sont des cordes, s'appelle un angle *inscrit*. Cet angle intercepte l'arc MH et il est sixième, c'est-à-dire égal à la moitié de MBH. L'angle MRC, qui est aussi inscrit et qui est la moitié de l'angle au centre MBC, intercepte le même arc MC ; il résulte de là que tout angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

Si nous envisageons l'angle MOK, qui est appelé angle *intérieur*, nous verrons qu'étant demi, il doit avoir pour mesure le quart de la circonférence. Mais l'arc MK compris entre ses côtés, plus l'arc AC compris entre ses côtés prolongés, font une demi-circonférence; donc on peut conclure que tout angle intérieur a pour mesure la moitié de la somme des arcs compris entre ses côtés, et ses côtés prolongés.

Si l'angle était *extérieur* à la circonférence, il aurait pour mesure la moitié de la différence des deux arcs interceptés. L'angle formé par une tangente et par une corde a pour mesure la moitié de l'arc compris entre la tangente et la corde.

Nous avons vu comment on partage une ligne droite en deux, en quatre, en huit parties égales. Voici un procédé qui est direct, et au moyen duquel on peut partager une droite en trois, en six, en neuf, en douze, etc., parties égales. Supposons qu'il s'agisse de trouver le tiers de la droite AB (*fig. 1.*) Des points A et B comme centres, et avec une ouverture de compas égale à la droite, je décris des arcs qui se coupent en C et en M : je joins les points A, M et B au point C; je prends $AS = FB = AO$; je joins le point O au point S, le point A au point F : ces deux lignes se coupent en E; menant CE et prolongeant en D, j'obtiens AD qui est le tiers de AB. En effet, en prolongeant AF jusqu'à la rencontre de BC parallèle à DC, on a la proportion : $BA : AG :: DA : AE$; mais AE est le tiers de AG, donc AD est le tiers de AB. La droite AO en étant la moitié, il en résulte que DO en est le sixième. En prenant la moitié de DO, on aurait le douzième de AB, et en prenant le tiers de AD, on en aurait le neuvième.

Si l'on avait à partager l'arc CR en deux parties égales, il n'y aurait qu'à partager la corde CR qui le sous-tend; pour partager en trois, le moyen est inconnu. On trouve facilement le tiers d'une circonférence, le tiers d'un angle de 45

ou de 90° , mais il a été impossible jusqu'à ce jour de trouver le tiers d'un arc quelconque.

Lorsqu'une circonférence ou un arc sont donnés, on peut trouver immédiatement le centre du cercle auquel ils appartiennent ; on peut aussi inscrire un cercle dans un triangle, mener une tangente à une circonférence, et même une tangente commune à deux circonférences. Tous ces problèmes n'offrent pas la moindre difficulté, et pour en trouver la solution, il suffit d'avoir présentes à l'esprit les propriétés des *figures* dont ils rappellent l'idée.

En envisageant une *figure* quelconque, il est facile de remarquer que les côtés peuvent tous diminuer ou augmenter en même temps d'une quantité égale, sans pour cela que la grandeur des angles varie. Si deux *figures* sont telles, que dans leurs côtés homologues elles ne diffèrent que du plus grand au plus petit, ou bien si elles sont telles, que leurs angles soient égaux et leurs côtés homologues proportionnels, on dit que ces deux *figures* sont semblables. Les caractères des *figures* semblables sont faciles à énumérer.

La ligne droite qui tombe sur une autre droite de manière à former avec elle deux angles demis, est appelée *perpendiculaire*. Les autres lignes menées d'un point de la *perpendiculaire* à l'autre ligne sont des obliques. Plus ces obliques s'éloignent du pied de la perpendiculaire, plus elles sont longues ; lorsqu'elles s'en éloignent également, elles sont évidemment égales.

Ces propositions préliminaires, dont on pourrait augmenter le nombre, ne sont pas autre chose, comme il est facile de le voir, qu'une simple description de *faits géométriques*. Ces faits sont aujourd'hui noyés dans un amas incohérent d'expressions vagues et indéterminées. On balbutie des explications, des démonstrations et des preuves sans savoir en quoi consiste une explication, une démonstration ou une preuve ; ces mots, mal définis, sont em-

ployés à tort et à travers, et l'esprit le mieux disposé ne peut leur attacher une signification précise. Le géomètre croit toujours être au sein des sophistes grecs, et il parle comme s'il voulait les empêcher de l'interrompre; il accumule alors des démonstrations et des preuves, et il ne sait, ni ce que c'est qu'une démonstration, ni ce que c'est qu'une preuve. Si l'on ouvre la Géométrie la plus populaire, celle de Legendre, on voit bientôt qu'une foule de propositions pèchent contre toutes les lois de la vraie logique. Il commence par diviser en *axiomes*, *théorèmes*, *problèmes*, *lemmes*, *corollaires*, *scolies*, *hypothèses*, un ensemble de propositions et de procédés qu'il ne sépare nullement et qu'il va confondre à toutes les pages de son livre. Il ne craindra pas de vous démontrer qu'on peut élever une perpendiculaire sur une droite; que les angles droits sont égaux; que la somme de deux angles adjacents sur une droite fait deux angles droits; que dans tout triangle un côté est plus petit que la somme des deux autres; que la ligne enveloppante est plus grande que la ligne enveloppée; qu'à un plus grand angle est opposé le plus grand côté; que deux triangles sont égaux lorsque les trois côtés sont égaux; que la perpendiculaire est plus courte que les obliques; que le diamètre est la plus longue de toutes les cordes; que deux cordes égales sous-tendent des arcs égaux, et une foule d'autres propositions qui ne sauraient jamais être l'objet d'aucune démonstration. Elles sont, non des *axiomes* qui n'existent pas en tant que fondement à priori de la science, mais de simples faits qui se saisissent immédiatement. On ne peut savoir en quoi consiste une perpendiculaire sans voir qu'on en peut élever une sur une droite; on sait que les angles droits sont égaux quand on sait ce que c'est qu'un angle droit; quiconque a l'idée du triangle sait qu'un côté est plus petit que la somme des deux autres; et une démonstration, étant une appréciation de rapports, ne saurait

trouver régulièrement place en telle matière. On peut affirmer sans crainte, que les deux tiers des propositions de nos Géométries les plus en usage ne sont pas autre chose que du pur bavardage, bien propre à inspirer le dégoût de la géométrie et à jeter le trouble dans l'intelligence la mieux disposée. Un auteur bien connu, qu'il est inutile de nommer, commence ainsi un chapitre de géométrie. « **AXIOME.** *D'un point à un autre on ne peut mener qu'une ligne droite.* » **THÉORÈME.** *Deux droites qui ont deux points communs A et B, coïncident dans toute leur étendue.* » Suit, presque une page d'un gâchis tautologique que l'auteur appelle une démonstration. Assurément il ne s'est jamais demandé ce que signifie cette expression, et il serait tout aussi embarrassé d'en indiquer le sens que d'en trouver un à la page ridicule que j'ai sous les yeux; elle se termine par ces mots qui le sont davantage encore dans cet endroit : « **COROLLAIRE.** *Deux points suffisent pour déterminer une droite.* » Plus loin on trouve ceci : « **THÉORÈME.** *Deux cercles décrits du même rayon sont égaux.* » Il est entendu qu'il démontre ce théorème avec autant de succès que le premier, et qu'il pose majestueusement le corollaire qui ne manque pas son heure et sa place. « **COROLLAIRE.** *Pour tracer une circonférence égale à une autre, il suffit d'employer le même rayon.* » Et vous, monsieur l'auteur, quand vous voudrez faire un civet, vous prendrez un lièvre. Je vous fais grâce du principe, de l'axiome, du théorème, de la démonstration et du corollaire relatifs à l'établissement de cette vérité fondamentale. O grand et illustre Molière ! où es-tu donc ?

C'est avec du galimatias de cette sorte qu'on fait de la géométrie. Je le demande à tout homme de bon sens, quel esprit droit pourrait supporter avec calme une si creuse divagation ? Ces insupportables scolastiques ne tarderont sans doute pas à démontrer la droite elle-même, puis enfin à démontrer le point; et quand on leur demandera ce qu'ils

entendent par *démontrer*, ils n'en sauront absolument rien.

• Une démonstration, sachez-le donc, a pour but une appréciation de rapports; on ne *démontre* ni les choses, ni leurs attributs et propriétés : on peut seulement démontrer que telle chose est contenue tant de fois dans une autre de la même espèce; mais il n'est pas moins ridicule d'essayer de démontrer que deux points suffisent pour déterminer une droite qu'il ne le serait de vouloir démontrer que le soleil est brillant, que l'argent est blanc, que l'or est jaune, etc. Quiconque sait ce que c'est qu'une ligne droite, sait que deux droites qui ont deux points communs coïncident, et que deux points suffisent pour la déterminer. De même, celui qui a l'idée du cercle, ne peut douter que deux cercles d'un même rayon ne soient égaux, et que pour tracer une circonférence égale à une autre, il ne faille employer le même rayon, puisque ces notions sont comprises dans celle du cercle, comme celle de blanc est contenue dans celle d'argent, celle de brillant dans celle de soleil. Il est temps enfin d'attacher une signification précise aux expressions dont on se sert, car la musique que font les mots ajoutés adroitement les uns aux autres ne pourra bientôt plus satisfaire personne. La dialectique et la sophistique perdent du terrain chaque jour; l'esprit tend de plus en plus à se débarrasser de ses chaînes; il faut qu'il trouve dans la science un langage éminemment rationnel, et qu'il ne soit pas obligé de se livrer à la torture pour joindre le signe à la chose signifiée. Il lui faut là une voie parfaitement achevée où il puisse marcher d'un pas ferme et assuré. Des mots faisant un bruit plus ou moins agréable ne sauraient l'intéresser : il lui faut quelque chose de plus substantiel; et le géomètre ne saurait mettre trop d'empressement à faire disparaître les plantes parasites qui se montrent en abondance dans le champ qu'il cultive. Il peut sans doute parler d'explications, de preuves, de démonstrations; mais il faut qu'il montre la différence qui existe

entre ces trois opérations de l'esprit, qu'il dise en quoi consiste l'*explication*, la *preuve*, la *démonstration*, qu'il fasse voir la limite de l'*évidence*, et qu'il dise nettement ce qu'il entend par *principe* et par *axiome* et comment lui sont fournies ces différentes données. Les sophistes de la Grèce ne sont plus là pour l'interrompre; mais s'il a une complète liberté de parole et s'il veut être autre chose qu'un théologien vide et creux, il doit mettre de la logique dans son langage et ne pas employer un mot sans l'avoir parfaitement déterminé. Lorsque le véritable géomètre sera arrivé à ce point, la science aura fait un pas immense. On ne nous parlera plus de *principes*, d'*axiomes*, de *théorèmes*, de *corollaires*, de *scolies*, de *preuves*, de *démonstrations*, à propos de tout et sans savoir réellement ce que l'on dit; on se contentera sans doute de nous montrer successivement les figures et de nous en faire saisir les différents attributs: la science saura qu'elle ne peut avoir d'autre méthode, que son but doit consister à faire connaître des distincts et non à balbutier des mots vides de sens. L'esprit alors se sentira à son aise au sein des sublimes vérités qui brillcront du plus pur éclat; il y déploiera agréablement ses ailes et y prendra toute son ampleur; rien n'arrêtera plus son élan, et ses chaînes tomberont pour toujours. Il verra combien sont aimables les vérités de cette science, combien elles sont faciles à saisir; et il ne craindra pas de rendre les géomètres seuls responsables du tort qu'il a eu de penser souvent que ces vérités étaient presque aussi détestables que l'erreur elle-même.

Fin de la deuxième livraison.